Physique MP – Outils mathématiques : analyse vectorielle

22 février 2021

1 Calculs vectoriels

1.1 Produit scalaire

Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u} \cdot \vec{v} = u.v.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Norme d'un vecteur $u = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

On rappelle la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire, ainsi que la notion d'orthogonalité.

Dans un repère orthonormé $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ et $u = ||\vec{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Savoir-faire : projections.

1.2 Produit vectoriel

Produit vectoriel dans une base orthonormée directe : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$

On rappelle que le produit vectoriel est bilinéaire, antisymétrique ($\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$), et nul si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Interprétation géométrique $\vec{u} \wedge \vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$; $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ direct ; $||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = u.v.\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Produit mixte de trois vecteurs $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$. Propriété : $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}$

1.3 Dérivées des "produits"

Pour le produit scalaire de fonctions vectorielles, même règle qu'avec des fonctions réelles.
De même pour le produit vectoriel : $\frac{\mathrm{d}(\vec{u} \wedge \vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ en faisant attention à conserver l'ordre des vecteurs.

1.4 Systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$; $\delta\vec{l} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\vec{e_x} + \mathrm{d}y\vec{e_y} + \mathrm{d}z\vec{e_z}$

Coordonnées cylindriques $\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$; $\delta\vec{l} = \mathrm{d}r\vec{e_r} + r\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta} + \mathrm{d}z\vec{e_z}$

Coordonnées sphériques Attention, r et θ n'ont pas la même signification en coordonnées cylindriques et sphériques.
$\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r}$; $\delta\vec{l} = \mathrm{d}r\vec{e_r} + r\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta} + r\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\vec{e_\varphi}$

2 Analyse vectorielle

Remarque : le gradient, le divergent, le rotationnel et le laplacien sont linéaires.

2.1 Gradient

Définition $f \longrightarrow \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}[f]$ telle que $\mathrm{d}f = \vec{A}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{l_M} \Longleftrightarrow f(Q) - f(N) = \int_N^Q \vec{A}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{l_M}$.

Remarque : champ statique = indépendant du temps ; champ uniforme = indépendant des coordonnées de l'espace. Surface iso-f = telle que $\forall M, f(M) = $ cste.

Propriétés : $\overrightarrow{\text{grad}}[f]$ est orthogonal en tout point aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

Expression en coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{\text{grad}}[f] = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \end{pmatrix} = \vec{\nabla} f$

Expressions en coordonnées cylindriques et sphériques non exigibles.

2.2 Divergence

Définition $\vec{A} \longrightarrow \text{div}[\vec{A}]$ telle que $\text{div}[\vec{A}] = \frac{\mathrm{d}^3\phi_{\vec{A}}}{\mathrm{d}^3 V_M}$.

Expression en coordonnées cartésiennes : $\text{div}[\vec{A}] = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$

Remarque : $\text{div}[\vec{A}] = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

Théorème d'Ostrogradski Domaine $(\mathscr{D})$ de l'espace, de frontière $(\mathscr{S})$,

$$\phi_{\vec{A}} = \oiint_{P \in (\mathscr{S})} \vec{A}(P) \cdot \mathrm{d}^2\vec{S_P} = \iiint_{M \in (\mathscr{D})} \text{div}[\vec{A}](M) \mathrm{d}^3 V_M$$

2.3 Rotationnel

Définition $\vec{A} \longrightarrow \overrightarrow{\text{rot}}[\vec{A}]$ précisant le caractère "tourbillonnaire" d'un champ de vecteurs.

Expression en coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{\text{rot}}[\vec{A}] = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial A_x}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \end{pmatrix}$

Propriétés : $\text{div}\left[\overrightarrow{\text{rot}}\left[\vec{A}\right]\right] = 0$; $\overrightarrow{\text{rot}}\left[\overrightarrow{\text{grad}}[f]\right] = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}[\vec{A}] = \vec{0} \Longleftrightarrow \exists f,\ \vec{A} = -\overrightarrow{\text{grad}}[f]$.

Théorème de Stokes Contour $(\mathscr{C})$ orienté, définissant une surface $(\mathscr{S})$ orientée par rapport à $(\mathscr{C})$,

$$C_{\vec{A}} = \oint_{P \in (\mathscr{C})} \vec{A}(P) \cdot \mathrm{d}\vec{l_P} = \iint_{M \in (\mathscr{S})} \overrightarrow{\text{rot}}[\vec{A}](M) \cdot \mathrm{d}^2\vec{S_M}$$

2.4 Laplacien

Définition $f \longrightarrow \Delta[f]$ telle que $\Delta[f] = \text{div}\left[\overrightarrow{\text{grad}}[f]\right]$.

Expression en coordonnées cartésiennes : $\Delta[f] = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$

Remarque : $\Delta[f] = \vec{\nabla}^2 f$

Pour un champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes : $\Delta[\vec{A}] = \Delta[A_x]\vec{e_x} + \Delta[A_y]\vec{e_y} + \Delta[A_z]\vec{e_z}$

Remarque : une identité utile : $\Delta\left[\vec{A}\right] = \overrightarrow{\text{grad}}\left[\text{div}\left[\vec{A}\right]\right] - \overrightarrow{\text{rot}}\left[\overrightarrow{\text{rot}}\left[\vec{A}\right]\right]$